ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Μαΐου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι: το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$.

Μονάδες 10

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο;

Μονάδες 5

Α3. Να γράψετε τον αριθμό καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις και δίπλα σε αυτόν το γράμμα (Σ) αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα (Λ) αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων ισούται με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
2. $(\log_\alpha x)^\kappa = \kappa \log_\alpha x$, για κάθε $x>0$ και $0<\alpha\neq 1, \kappa\in\mathbb{R}$.
3. $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$.
4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\phi(x)-c, c>0$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες προς τα κάτω.
5. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι δυνατόν να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε περισσότερα από ένα σημείο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2-5x+\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα το 1 και διαιρούμενο με το $x-2$ δίνει υπόλοιπο 12.

Β1. Να αποδείξετε ότι: $\alpha=1, \beta=2$.

Μονάδες 8

Β2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες 7

Β3. α) Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$.

Μονάδες 3

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)-12<0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(\pi-x)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)+\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\sigma\upsilon\nu(\pi-x), x\in\mathbb{R}$

και η συνάρτηση $g(x)=f\left(\frac{\pi x}{2}\right), x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+1, x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g καθώς επίσης και την περίοδο της.

Μονάδες 3

Γ3. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο διάστημα $[0,4]$.

Μονάδες 5

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$ στο διάστημα $[0,4]$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\beta x^2-4\alpha x-3$, όπου α, β ακέραιοι αριθμοί με τον α να είναι ρίζα του πολυωνύμου P, και η συνάρτηση $f(x)=\log\left(2^{x+1}+8\right)-2\log 2, x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να λύσετε την ανίσωση $0<f(x)<1$ (1).

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε τις τιμές των α,β αν οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $x\in(-\infty,4)$, και ισχύει $\left(f(\alpha)\right)^{5\beta-24}<\left(f(\alpha)\right)^{\beta(\beta-5)}$.

Μονάδες 8

Για $\alpha=1, \beta=5$

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει $P(\eta\mu x)+f(\eta\mu x)<1$.

Μονάδες 4

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Μαΐου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 134

Α2. Σελίδα 33

Α3. Σ Λ Σ Σ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\begin{cases} P(1)=0 \\ P(2)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\alpha-5+\beta=0 \\ 16+4\alpha-10+\beta=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ 3\alpha=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2 \end{cases}$

Β2. $P(x)=2x^3+x^2-5x+2$

Κάνουμε σχήμα Horner, φυσικά με το 1.

2	1	-5	2	1
	2	3	-2	
2	3	-2	0	

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}$

Β3. α)

2	1	-5	2	2
	4	10	10	
2	5	5	12	

$P(x)=(x-2)(2x^2+5x+5)+12$

β) $P(x)-12<0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2+5x+5)<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

Το τριώνυμο $2x^2+5x+5$ είναι πάντοτε θετικό αφού έχει αρνητική διακρίνουσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή από την θεωρία ως γνωστόν *ισχύει* :

$$\eta\mu(\pi-x)=\eta\mu\chi\ ,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu\chi$$

$$,\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)=\sigma\upsilon\nu\chi\ ,\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\sigma\upsilon\nu\chi$$

και τέλος $\sigma\upsilon\nu(\pi-x)=-\sigma\upsilon\nu\chi$ η f(x) γίνεται :

f(x)= $\eta\mu^2\chi+2\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi = 2\sigma\upsilon\nu\chi+1$

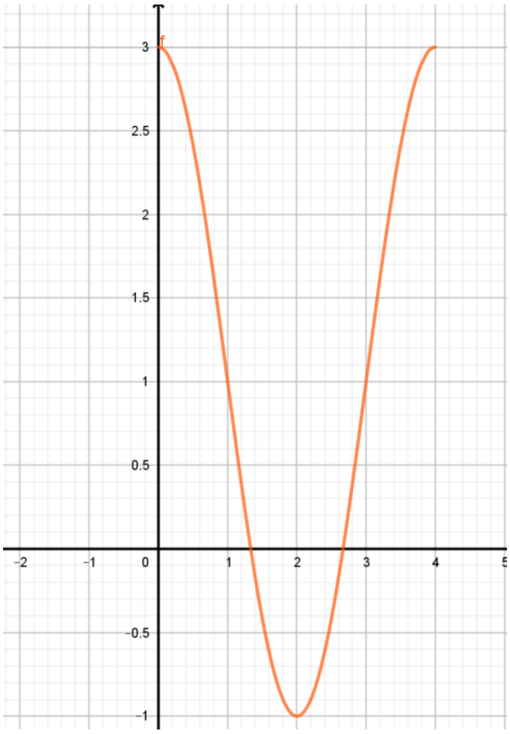
Γ2. Για $x\in\mathbb{R}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x\in[-1,1]$ τότε $2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x \in [-2,+2]$

άρα $g(\chi)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x+1 \in [-1,3]$

άρα έχει ελάχιστο το -1, μέγιστο το 3 και περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

Γ3. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα τιμών

x	0	1	2	3	4
y	3	1	-1	1	3



Γ4. $2συν\frac{π}{2}x+1=0 \Leftrightarrow συν\frac{π}{2}x=-1/2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow συν\frac{π}{2}x=συν(π-π/3) \Leftrightarrow \frac{π}{2}x=2κπ\pm 2π/3 \Leftrightarrow χ=4κ\pm 4/3$ $κ \in Z$

$0<χ<4 \Rightarrow 0<4κ+4/3<4 \Rightarrow -4/3<4κ<8/3 \Rightarrow -1/3<κ<2/3$ οπότε κ=0 όμοια

$0<χ<4 \Rightarrow 0<4κ-4/3<4 \Rightarrow 4/3<4κ<16/3 \Rightarrow 1/3<κ<4/3$ οπότε κ=1

Για κ = 0 ο τύπος με το + δίνει χ=4/3. Για κ=1 ο τύπος με το – δίνει 8/3

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $0<f(x)<1 \Leftrightarrow 0<\log\ 2^{x+1}+8\ -2\log 2<1 \Leftrightarrow$

$\log 1<\log\ 2^{x+1}+8\ -\log 2^2<\log 10 \Leftrightarrow$

$\log 1<\log\frac{2^{x+1}+8}{4}<\log 10 \underset{\log x\uparrow}{\Longleftrightarrow} 1<\frac{2^{x+1}+8}{4}<10$

$\Leftrightarrow 4<2^{x+1}+8<40 \Leftrightarrow -4<2^{x+1}<32 \Leftrightarrow$

(η πρώτη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$) $2^{x+1}<2^5 \underset{2^x\uparrow}{\Longleftrightarrow} x+1<5 \Leftrightarrow x<4$

Δ2 Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές αφού οι α, β είναι ακέραιοι. Ο α, ως ακέραια ρίζα του πολυωνύμου P, ανήκει στο σύνολο των διαιρετών του σταθερού όρου 3. Δηλαδή είναι ένας από τους -1, 1, -3, 3. Σε κάθε περίπτωση α<4. Επομένως, από το Δ1, προκύπτει ότι 0< f(α)<1. Έτσι έχουμε: $f(α)^{5β-24}<f(α)^{β(β-5)}$ $\overset{(f(α))^x\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ $5β-24>β(β-5) \Leftrightarrow β^2-10β+24<0$ και από τον κανόνα προσήμου τριωνύμου προκύπτει $4<β<6$, οπότε αφού ο β είναι ακέραιος έπεται ότι β=5.

Για β=5 και αφού ο α είναι ρίζα του πολυωνύμου P έχουμε:

$P(α)=0 \Leftrightarrow 2α^3+5α^2-4α^2-3=0 \Leftrightarrow 2α^3+α^2-3=0 \Leftrightarrow$ (σχήμα Horner στη θέση 1) $(α-1)(2α^2+3α+3)=0 \Leftrightarrow α=1$ ($2α^2+3α+3=0$ αδύνατη)

Δ3. $P(x) < 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 < 0 \Leftrightarrow$ (σχήμα Horner στη θέση 1)

$(x-1)(2x^2 + 7x + 3) < 0$

x	$-\infty$		-3		$-1/2$		1		$+\infty$
x-1		-	|	-	|	-	0	+	
$2x^2+7x+3$		+	0	-	0	+		+	
P(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Επομένως $x \in -\infty,-3 \cup \left(-\frac{1}{2},1\right)$

Δ4. Για $x \in 0,\pi$ είναι $ημx \in 0,1$. Από τον πίνακα του Δ3 προκύπτει ότι

$P(ημχ) \leq 0$ (2).

Επίσης από το Δ1, προκύπτει ότι για $ημx \leq 1 < 4$ είναι f(ημx)<1 (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) προκύπτει P(ημx) + f(ημx)<1.